



TITLE:

# Gorenstein局所環の安定イデアル について(Frobenius写像の可換環 論への応用)

AUTHOR(S):

大石, 彰

---

CITATION:

大石, 彰. Gorenstein局所環の安定イデアルについて(Frobenius写像の可換環論への応用). 数理解析研究所講究録 1990, 713: 181-187

ISSUE DATE:

1990-02

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/101706>

RIGHT:

## Gorenstein 局所環の安定イデアルについて

広大理 大石 彰 ( Akira Ooishi )

0. 安定イデアル.  $(R, m, k)$  を  $d$  次元 Cohen-Macaulay 局所環,  $I$  をその  $m$ -準素イデアルとする。等式  $\ell(I/I^2) = e(I) + (d-1)\ell(R/I)$  が成立するとき,  $I$  は 安定 (stable) であると言う。  $R$  の剰余体が無限体のとき, この条件は  $I^2 = IJ$  となるパラメーターイデアル  $J \subset I$  が取れることと同値である。

例 1.  $m$  が安定であるとき, 即ち等式  $emb(R) = e(R) + d - 1$  が成り立つとき  $R$  は 最大埋入次元 (maximal embedding dimension) を持つと言われ Sally 等により良く研究されている。

例 2.  $d = 1$ ,  $R$  が解析的不分岐とする。  $R$  の任意の整閉  $m$ -準素イデアルが安定であるとき,  $R$  は Arf 環 であると

言う (Lipman)。そのためには、 $\mathcal{R}$  の全ての無限近点 (infinitely near point) の局所環が最大埋入次元を持つことが必要十分である。特に seminormal 局所環は Arf 環である。例えば  $k[[x_1, \dots, x_n]]/(x_i x_j \mid i \neq j)$ ,  $k[[t^e, t^{e+1}, \dots, t^{2e-1}]]$  などは Arf 環で前者は seminormal, 後者は seminormal でない。

例3.  $d=1$ ,  $\mathcal{R}$  は解析的不分岐で剰余体  $k$  を含むとする。 $\mathcal{R}$  の任意の整閉  $m$ -準素イデアルが安定かつ normal であるためには、 $\mathcal{R}$  が有限個の  $k[[t^e, t^{e+1}, \dots, t^{2e-1}]]$  の形の環の貼り合わせになっていることが必要十分である。但し、イデアル  $I$  はその全ての巾が整閉であるとき normal であると言う。上の条件は  $\bar{p}_a(\mathcal{R}) := \ell(m\bar{\mathcal{R}}/m) = 0$  なることと同値である。

例4.  $d=2$ ,  $\mathcal{R}$  が解析的正規とする。 $\mathcal{R}$  の任意の整閉  $m$ -準素イデアルが安定かつ normal であるためには  $\mathcal{R}$  が有理的特異点 (即ち  $p_g(\mathcal{R}) = 0$ ) であることが必要十分である (Rees)。

例5.  $\mathcal{R}$  が  $d$  次元正則局所環のとき,  $m^r$  が安定  $\iff r=1$

又は  $d \leq 2$  又は  $(d, r) = (3, 2)$ 。

1. 主定理. 安定イデアルについては多くのことが知られている。特に  $I$  が安定ならば次数付環  $G(I) = \bigoplus_{n \geq 0} I^n / I^{n+1}$  は Cohen-Macaulay 環である (Valla, 1979)。そこで、次に  $I$  が安定のとき、 $G(I)$  がいつ Gorenstein 環になるかを問題にする。もし  $G(I)$  が Gorenstein 環ならば  $R$  は必然的に Gorenstein 環なので、最初から  $R$  は Gorenstein 環としてよい。そのとき  $I$  がパラメーターイデアルならば  $G(I) \cong R/I[x_1, \dots, x_d]$  が Gorenstein 環であることは明白。よって我々の問いに対する答えは次で与えられる：

定理.  $R$  が Gorenstein 局所環、 $I$  が  $R$  の安定な  $m$ -準素イデアルでパラメーターイデアルでないとする。このとき

$$(1) \quad r(G(I)) \leq 2\ell(R/I) - e(I) + 1.$$

$$(2) \quad G(I) \text{ が Gorenstein} \iff e(I) = 2\ell(R/I).$$

(但し  $r(G(I))$  は  $G(I)$  の Cohen-Macaulay 型を表わす。)

定理は  $d=0$  の場合に帰着させて証明される。今  $(R, m, k)$  をアルチン Gorenstein 局所環として、有限生成  $R$ -加群  $M$  に対して  $M^* = \text{Hom}(M, R)$  とおく。すると双対性により

$$M^{**} \cong M, \quad \ell(M^*) = \ell(M),$$

又,  $R$  のイデアル  $I$  に対して  $\text{ann}(I) = (R/I)^*$  であることから

$$\text{ann}(\text{ann}(I)) = I, \quad I \subset J \text{ とすると } \text{ann}(I)/\text{ann}(J) \cong (J/I)^*.$$

以下,  $I$  を  $R$  のイデアルで  $I \neq 0$ ,  $R$  かつ  $I^2 = 0$  とし  $J = \text{ann}(I)$  とおく。すると上のことより

$$\begin{aligned} \text{Soc}(R) &\subset I \subset J, \quad \text{ann}(J) = I, \\ \ell(I) &= \ell(R/J), \quad \ell(J) = \ell(R/I), \\ \ell(I) &\leq \ell(J) = \ell(R/I). \end{aligned}$$

よって 次の補題が従う:

補題.  $2\ell(I) \leq \ell(R)$  かつ  $2\ell(I) = \ell(R) \iff I = J$ .

次数付環  $G(I) = R/I \oplus I/I^2$  は  $\mathfrak{m}/I \oplus I/I^2$  を極大イデアルとする アルチン局所環である。

命題.  $r(G(I)) = \ell(J/I + \mathfrak{m}J) + 1$   
 $\leq \ell(R) - 2\ell(I) + 1.$

証明. 等式は  $\text{Soc}(G(I)) \cong (J/I + \mathfrak{m}J)^* \oplus k$  を示せば

よい。  $(\bar{a}, \bar{b}) \in G(I)$  のとき

$$(\bar{a}, \bar{b}) \in \text{Soc}(G(I)) \iff (\bar{a}, \bar{b})(m/I \oplus I/I^2) = 0$$

$$\iff a \in (I : m) \cap \text{ann}(I) = \text{ann}(Jm) \cap \text{ann}(I) = \text{ann}(I + mJ) \text{ かつ } b \in I \cap \text{Soc}(R) = \text{Soc}(R)。$$

従って,  $\text{Soc}(G(I)) \cong \text{ann}(I + mJ)/\text{ann}(J) \oplus \text{Soc}(R) \cong (J/I + mJ)^* \oplus k$ 。不等式は  $\ell(J/I + mJ) \leq \ell(J/I) = \ell(J) - \ell(I) = \ell(R/I) - \ell(I) = \ell(R) - 2\ell(I)$  より明白。

系. 次は同値:

- (1)  $I = J$  (又は  $I \cong J$ )。
- (2)  $2\ell(I) = \ell(R)$ 。
- (3)  $G(I)$  が Gorenstein 環。

定理の証明:  $R(X)$  を考えることにより  $k$  は無限体としてよい。  $J = (x_1, \dots, x_d)$  を  $I$  の極小還元として  $S = R/J$ ,  $L = I/J$  とおくと,  $S$  はアルチン Gorenstein 局所環で,  $\ell(S) = e(I)$ ,  $L^2 = 0$ ,  $L \neq 0$  かつ  $G(L) \cong G(I)/(x_1^*, \dots, x_d^*)$ 。  
従って

$$\begin{aligned} r(G(I)) &= r(G(L)) \leq \ell(S) - 2\ell(L) + 1 \\ &= 2\ell(S/L) - \ell(S) + 1 = 2\ell(R/I) - e(I) + 1 \end{aligned}$$

かつ,  $G(I)$  が Gorenstein  $\iff G(L)$  が Gorenstein  $\iff$

$$2\ell(L) = \ell(S) \iff e(I) = 2\ell(R/I).$$

## 2. 諸例.

例6.  $R$  が解析的不分岐な 1 次元 Gorenstein 局所環で DVR でないとする、 $R$  の導手イデアル  $C = R : \bar{R}$  は安定な整閉  $m$ -準素イデアルで  $G(C)$  は Gorenstein 環である。

例7.  $R = k[[t^2, t^{2r+1}]]$ ,  $r \geq 1$  とすると  $R$  の任意の  $m$ -準素イデアル  $I$  は安定で、 $I$  が整閉のとき  $G(I)$  が Gorenstein  $\iff I = m$  又は  $(t^{4r-2}, t^{4r-1})$ 。

例8.  $R = k[[t^e, t^{e+1}, \dots, t^{2e-2}]]$ ,  $e \geq 3$  とすると  $R$  の整閉  $m$ -準素イデアル  $I$  に対して  $G(I)$  が Gorenstein  $\iff I = m$ ,  $(t^{2e-2}, t^{2e}, t^{2e+1}, \dots, t^{3e-3})$  又は  $(t^{2e}, t^{2e+1}, \dots, t^{3e-3})$  ( $R$  の導手)。

例9.  $R$  が解析的不分岐な 1 次元 Gorenstein 局所環で  $k$  を含むとする。このとき  $G(I)$  が Gorenstein 環になるような整閉  $m$ -準素イデアル  $I$  は  $m$  のみ  $\iff \hat{R} \cong k[[X, Y]]/(XY)$  又は  $k[[X, Y]]/(X^2 - Y^3)$ 。

例10.  $R$  が  $d$  次元正則局所環のとき  $m^r$  が安定かつ  $G(m^r)$  が Gorenstein  $\iff r=1$  又は  $d \leq 1$  又は  $(d, r) = (3, 2)$ 。

例11.  $R$  が 2次元 Cohen-Macaulay 局所環,  $e(R) = 2$  のとき任意の  $r$  について  $m^r$  は安定かつ  $G(m^r)$  は Gorenstein である。

(October 1989)